

# Sumário

## **Análise Matricial de Estruturas com orientação a objetos**

Prefácio.....	IX
Notação.....	XIII
Capítulo 1 – Introdução.....	1
1.1. Processo de análise.....	2
1.1.1. Modelo estrutural.....	2
1.1.2. Modelo discreto.....	3
1.1.3. Modelo computacional.....	6
1.2. Organização dos capítulos.....	8
1.3. Sugestão para leitura.....	10
Capítulo 2 – Discretização no Método da Rigidez Direta.....	11
2.1. Solução global discreta e solução local de engastamento perfeito.....	12
2.2. Dados de entrada típicos de um programa de computador.....	19

2.3. Resultados típicos de um programa de computador.....	22
2.4. Sistemas de coordenadas generalizadas.....	27
2.5. Graus de liberdade e forças generalizadas globais.....	29
2.6. Graus de liberdade e forças generalizadas locais nas direções dos eixos globais.....	31
2.7. Graus de liberdade e forças generalizadas locais nas direções dos eixos locais.....	32
2.8. Relação entre a numeração de coordenadas generalizadas locais e globais.....	37
Capítulo 3 – Organização de Classes.....	39
3.1. Classes, objetos e encapsulamento de dados.....	39
3.2. Diagrama de classes.....	40
3.3. Tipos de relacionamentos entre objetos.....	44
3.4. Herança e polimorfismo.....	45
3.5. Tipo abstrato de dados e construtores.....	47
3.6. Propriedades e métodos das classes do programa LESM.....	48
3.6.1. Classe Drv.....	48

3.6.2. Classe Material.....	49
3.6.3. Classe Section.....	50
3.6.4. Classe Node.....	50
3.6.5. Classe Elem.....	51
3.6.6. Classe Lelem.....	52
3.6.7. Classe Anm.....	53
3.6.8. Classe Print.....	54
Capítulo 4 – Idealização do Comportamento de Barras.....	57
4.1. Campo de deslocamentos.....	58
4.2. Campo de tensões e esforços internos.....	61
4.3. Relações de compatibilidade entre deslocamentos e deformações em barras.....	64
4.3.1. Deformações axiais.....	66
4.3.2. Deformações normais por flexão.....	67
4.3.2.1. Teoria de vigas de Navier.....	68

4.3.2.2. Teoria de vigas de Timoshenko.....	69
4.3.3. Distorções por efeito cortante.....	70
4.3.4. Distorções por torção.....	71
4.3.5. Vetor de deformações generalizadas do elemento infinitesimal.....	72
4.4. Relações diferenciais de equilíbrio.....	73
4.4.1. Condições de equilíbrio do elemento infinitesimal de barra do caso plano.....	74
4.4.2. Condição de equilíbrio na torção.....	75
4.5. Lei constitutiva linear para o material.....	75
4.6. Equilíbrio entre tensões e esforços internos em barras.....	78
4.6.1. Equilíbrio entre tensões normais e esforço normal e momento fletor.....	79
4.6.2. Equilíbrio entre tensões de cisalhamento e esforço cortante.....	81
4.6.3. Equilíbrio entre tensões cisalhantes e momento torçor.....	83
4.7. Relações de rigidez do elemento infinitesimal de barra.....	83
4.7.1. Rigidez axial do elemento infinitesimal de barra.....	84

4.7.2. Rigidez transversal (por efeito cortante) do elemento infinitesimal de barra.....	84
4.7.3. Rigidez à flexão do elemento infinitesimal de barra.....	86
4.7.4. Rigidez à torção do elemento infinitesimal de barra.....	87
4.8. Relações matriciais de rigidez do elemento infinitesimal de barra.....	88
4.9. Equações diferenciais dos modelos analíticos de barras.....	90
4.9.1. Equação diferencial para o comportamento axial.....	91
4.9.2. Equação de Navier para o comportamento à flexão.....	92
4.9.3. Equações diferenciais para o comportamento à flexão considerando distorção de cisalhamento.....	93
4.9.4. Resumo da idealização do comportamento de viga à flexão.....	97
4.9.5. Equação diferencial para o comportamento à torção.....	99
4.10. Consideração de efeitos de variação de temperatura.....	99
4.10.1. Deformações generalizadas iniciais provocadas por variação de temperatura.....	100
4.10.2. Equação diferencial para o comportamento axial para variação de temperatura.....	102

4.10.3. Equação diferencial para o comportamento à flexão para variação de temperatura sem considerar deformações por cisalhamento.....	102
4.10.4. Equação diferencial para o comportamento à flexão para variação de temperatura considerando deformações por cisalhamento.....	103
Capítulo 5 – Interpolação de Deslocamentos em Barras.....	105
5.1. Funções de forma para interpolação de deslocamentos e rotações em barras.....	106
5.2. Funções de forma para comportamento axial.....	113
5.3. Funções de forma para comportamento à flexão segundo a teoria de Navier.....	113
5.3.1. Funções de forma no plano xy sem articulação.....	114
5.3.2. Funções de forma no plano xy com articulação na extremidade inicial.....	115
5.4. Funções de forma para comportamento à flexão segundo a teoria de Timoshenko.....	117
5.4.1. Funções de forma no plano xy sem articulação.....	118
5.5. Funções de forma para comportamento à torção.....	120
Capítulo 6 – Formulação do Problema Discreto.....	121

6.1. Formulação do problema axial através do método dos resíduos ponderados.....	122
6.2. Formulação do problema transversal de flexão através do método dos resíduos ponderados.....	125
6.3. Princípio dos deslocamentos virtuais.....	128
6.4. Generalização do princípio dos deslocamentos virtuais.....	130
6.4.1. Energia de deformação interna virtual para pórtico plano.....	132
6.4.2. Energia de deformação interna virtual para grelha.....	133
6.5. Teoremas de reciprocidade.....	135
6.6. Aplicação do PDV para obtenção de soluções locais de barras isoladas.....	136
6.6.1. Coeficientes de rigidez axial de barra prismática.....	137
6.6.2. Coeficientes de rigidez à flexão de barra de Navier prismática sem articulação.....	138
6.6.3. Reações de engastamento de barra prismática para carregamentos axiais e transversais.....	140
6.7. Princípio da mínima energia potencial total.....	141
6.7.1. Princípio da mínima energia potencial total para o comportamento axial.....	142
6.7.2. Princípio da mínima energia potencial total para o comportamento transversal à flexão.....	149

6.7.3. Relação entre o princípio da mínima energia potencial e a equação diferencial do problema..	149
6.8. Método de Rayleigh-Ritz.....	151
6.9. Formulação do problema discreto por elementos finitos.....	156
6.9.1. Formulação em elementos finitos para o comportamento axial.....	157
6.9.2. Formulação em elementos finitos para o comportamento transversal à flexão.....	166
6.10. Formulação do problema completo para modelos reticulados.....	172
Capítulo 7 – Matriz de Rigidez Local.....	179
7.1. Coeficientes de rigidez locais.....	180
7.2. Matrizes de rigidez locais para cada modelo de análise.....	184
7.3. Expressão genérica para a matriz de rigidez de barra no sistema de eixos locais.....	186
7.4. Matrizes de deformação para barras de pórtico plano e grelha.....	188
7.5. Submatrizes de rigidez locais para comportamentos elementares de uma barra.....	189
7.5.1. Comportamento axial.....	190
7.5.2. Comportamento transversal à flexão no plano xy.....	190



7.5.2.1. Barra sem articulação.....	190
7.5.2.2. Barra com articulação na extremidade inicial.....	190
7.5.2.3. Barra com articulação na extremidade final.....	191
7.5.2.4. Barra com articulação nas duas extremidades.....	191
7.5.3. Comportamento transversal à flexão no plano xz.....	191
7.5.3.1. Barra sem articulação.....	191
7.5.3.2. Barra com articulação na extremidade inicial.....	191
7.5.3.3. Barra com articulação na extremidade final.....	192
7.5.3.4. Barra com articulação nas duas extremidades.....	192
7.5.4. Comportamento à torção.....	192
7.6. Matriz de rigidez local no sistema global.....	192
7.7. Implementação computacional da matriz de rigidez local.....	194
Capítulo 8 – Cargas Equivalentes Nodais Locais.....	199
8.1. Reações de engastamento de barra isolada para solicitações externas no sistema local.....	200

8.2. Reações de engastamento locais para forças distribuídas axiais e transversais.....	205
8.3. Reações de engastamento locais para variação de temperatura.....	206
8.4. Cargas equivalentes nodais de barra isolada no sistema de eixos globais.....	211
8.5. Implementação computacional das cargas equivalentes nodais.....	213
Capítulo 9 – Solução do Problema Global Discreto.....	219
9.1. Operações iniciais para análise e diagrama de sequência.....	220
9.2. Montagem da matriz de rigidez global.....	224
9.3. Montagem das cargas nodais combinadas no vetor das forças generalizadas globais.....	231
9.4. Interpretação do sistema de equações finais como imposição de equilíbrio aos nós isolados.....	235
9.5. Solução do sistema de equações finais.....	237
Capítulo 10 – Obtenção de Resultados de Análise.....	241
10.1. Determinação de reações de apoio.....	241
10.2. Determinação de esforços internos nas barras.....	242
Capítulo 11 – Introdução ao Método dos Elementos Finitos.....	247

11.1. Problema analítico do estado plano de tensão.....	248
11.1.1. Equação diferencial matricial de compatibilidade.....	249
11.1.2. Equação diferencial matricial de equilíbrio.....	250
11.1.3. Relação constitutiva do estado plano de tensão para material elástico-linear.....	250
11.1.4. Condições de contorno naturais.....	251
11.2. Concepção do problema global discreto em deslocamentos para o meio contínuo bidimensional.....	252
11.2.1. Discretização do domínio em elementos finitos.....	252
11.2.2. Aproximação para o campo de deslocamentos.....	253
11.2.3. Satisfação das condições de compatibilidade.....	255
11.2.4. Aproximação para o campo de tensões.....	257
11.2.5. Formulação do problema global discreto para modelos contínuos.....	260
11.2.6. Matriz de rigidez local.....	264
11.2.7. Cargas equivalentes nodais.....	265
11.2.8. Resumo da formulação em deslocamentos do MEF.....	266

11.3. Critérios que governam a seleção de modelos de elementos finitos.....	267
11.3.1. Critérios de continuidade (ou compatibilidade).....	268
11.3.2. Condições de completitude.....	269
11.3.3. Condições para aproximação assintótica.....	270
11.4. Considerações finais.....	271
Apêndice A – Funções de Forma.....	273
A.1 – Parâmetros utilizados.....	273
A.2 – Comportamento axial.....	273
A.3 – Comportamento transversal à flexão no plano local $xy$ .....	274
A.3.1 – Barra sem articulação.....	274
A.3.2 – Barra com articulação na extremidade inicial.....	274
A.3.3 – Barra com articulação na extremidade final.....	274
A.3.4 – Barra com articulação nas duas extremidades.....	275
A.4 – Comportamento transversal à flexão no plano local $xz$ .....	275

A.4.1 – Barra sem articulação.....	275
A.4.2 – Barra com articulação na extremidade inicial.....	276
A.4.3 – Barra com articulação na extremidade final.....	276
A.4.4 – Barra com articulação nas duas extremidades.....	276
A.5 – Comportamento à torção.....	276
Apêndice B – Soluções Locais de Engastamento.....	277
B.1 – Parâmetros utilizados.....	277
B.2 – Solicitações axiais.....	279
B.2.1 – Barra solicitada por força axial linearmente distribuída.....	279
B.2.2 – Barra solicitada por variação uniforme de temperatura.....	279
B.3 – Solicitações transversais de flexão.....	280
B.3.1 – Barra solicitada por força transversal linearmente distribuída no plano local xy.....	280
B.3.2 – Barra solicitada por força transversal linearmente distribuída no plano local xz.....	282
B.3.3 – Barra solicitada por gradiente transversal de temperatura no plano local xy.....	284

B.3.4 – Barra solicitada por gradiente transversal de temperatura no plano local xz.....	286
Apêndice C – Códigos QR para endereços URL.....	289
Referências Bibliográficas.....	305
Índice de Assuntos.....	309
Índice de Autores.....	319